École Supérieure Privée d'Ingénierie et de Technologies

Classes : $3^{\text{ème}}$ $A\&B$ | **Techniques d'estimation pour l'ingénieur** | Nombre de pages : 5

Date : 10/11/2021 | Heure : 15h | Durée : 1h

NB : La rédaction et la clarté des résultats seront prises en compte.

Exercice 1 :

Soit T une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. En utilisant la table statistique, calculer :
   a. (**1 pt**) $\mathbb{P}(0 \leq \text{T} \leq 0.8)$
   b. (**1 pt**) $\mathbb{P}(\text{T} \geq -0.5)$
   c. (**1 pt**) $\mathbb{P}(|\text{T}| \geq 1.5)$
2. (**1.5 pt**) Tracer la densité de la variable T (prenez soin d'indiquer sur le graphe l'espérance et l'écart-type).
3. (**1.5 pt**) Illustrer graphiquement les probabilités précédentes (Dans 3 graphes différents).
4. Déterminer a et b tels que :
   a. (**1 pt**) $\mathbb{P}(T \leq a) = 0.90$
   b. (**1 pt**) $\mathbb{P}(|T| \geq b) = 0.80$
5. On note F la fonction de répartition de T. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :
   a. (**1 pt**) $F(-t) = 1 - F(t)$
   b. (**1 pt**) $\mathbb{P}(|T| \geq t) = 2(1 - F(t))$

Correction Exercice1 :

1. a.

$$\begin{aligned}
P(0 \leq T \leq 0.8) &= F(0.8) - F(0) \\
&= P(T \leq 0.8) - P(T \leq 0) \\
&= (1 - P(T \geq 0.8)) - (1 - P(T \geq 0)) \\
&= P(T \geq 0) - P(T \geq 0.8). \\
&= 0.5 - 0.21186 \\
&= 0.28811
\end{aligned}$$

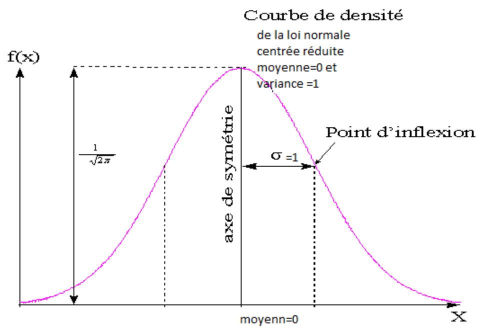
b.

$$\begin{aligned}
P(T \geq -0.5) &= P(T \leq 0.5) \\
&= 1 - P(T \geq 0.5) \\
&= 1 - 0.30854 \\
&= 0.69146
\end{aligned}$$

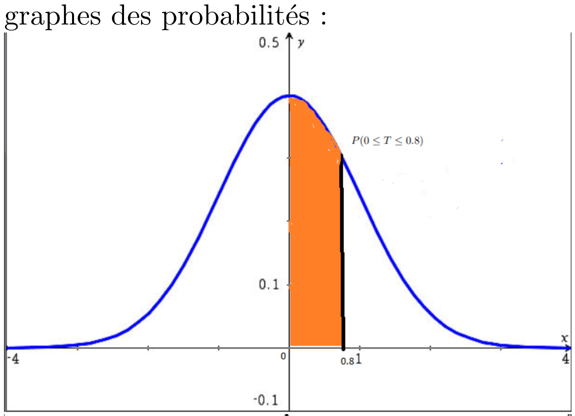
c.

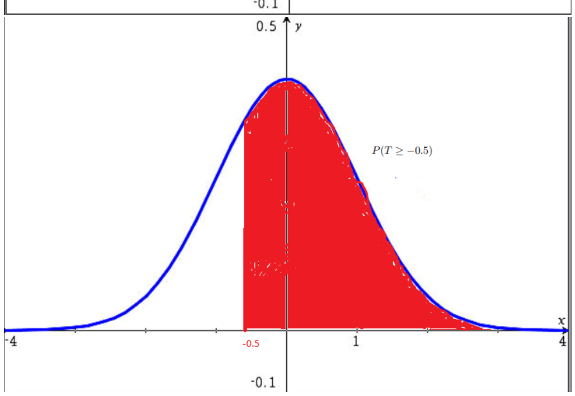
$$\begin{aligned}
P(|T| \geq 1.5) &= 1 - P(|T| \leq 1.5) \\
&= 1 - P(-1.5 \leq T \leq 1.5) \\
&= 1 - [P(T \leq 1.5) - P(T \leq -1.5)] \\
&= 1 - [P(T \leq 1.5) - P(T \geq 1.5)] \\
&= 1 - [1 - P(T \geq 1.5) - P(T \geq 1.5)] \\
&= 1 - [1 - 2P(T \geq 1.5)] \\
&= 2P(T \geq 1.5). \\
&= 2 * 0.06681 \\
&= 0.13362
\end{aligned}$$

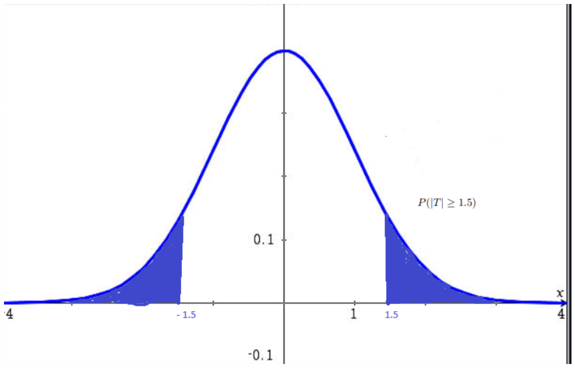
2. T suit la loi Normale centrée réduite alors $E(T) = 0$ et $V(T) = 1$.



3. graphes des probabilités :







a. $P(T \leq a) = 0.9$ alors $P(T \geq a) = 0.1$ et par une lecture inverse de la table de la loi normale le quantile $a = 1.28$.

b. $P(|T| \geq b) = 2P(T \geq b) = 0.8$ donc $P(T \geq b) = 0.4$ et le quantile $b = 0.25$.

4. a.

$$\begin{array}{rcl} F(-t) & = & P(T \leq -t) \\ & = & P(T \geq t) \quad parsymétrie. \\ & = & 1 - P(T \leq t) \\ & = & 1 - F(t). \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{rcl} P(|T| \geq t) & = & 2P(T \geq t) \\ & = & 2[1 - P(T \leq t)] \\ & = & 2[1 - F(t)] \end{array}$$

Exercice 2 :

Un sismologue mesure le nombre de jours qui s'écoulent entre deux sèismes de magnitude supérieure à 8. On suppose que cette durée est une v.a. X dont la densitée est :

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{k(\theta-1)}{2} x^{(\theta-2)} & \text{si} \qquad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec k est un réel à déterminer et $\theta > 1$ un paramètre à estimer.

1. (**2 pt**) Vérifier que pour $k = 2$, f est bien une densité de probabilité.
2. (**1 pt**) Montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{\theta-1}{\theta}$.
3. (**2 pt**) En déduire un estimateur $\hat{\theta}_n^{EMM}$ de θ par la méthode des moments.
4. Pour étudier le paramètre θ, on a effectué une suite de n expériences indépendantes qui ont donné les réalisations $(x_1, .., x_n)$ de n v.a. $(X_1, .., X_n)$ i.i.d. de même loi que X tel que $0 \leq x_i \leq 1$ avec $i = 1, .., n$.
   (a) (**2 pt**) Donner la fonction de vraisemblance $L(x_1, ..., x_n; \theta)$ associée à l'échantillon d'observations.
   (b) (**1 pt**) Montrer que la fonction Log-vraisemblance associée à l'échantillon d'observations est donnée par :
   $$lnL(x_1, ...x_n; \theta) = nln(\theta - 1) + \theta \sum_i ln(x_i) - 2 \sum_i ln(x_i)$$
   (c) (**2 pt**) En déduire l'estimateur $\hat{\theta}_n^{EMV}$ de θ par la méthode de vraisemblance.

Correction exercice2 :

1. Calculant k qui vérifie que $f \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.
   Alors $k \geq 0$ et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= 1 \quad alors \\
\int_0^1 k\frac{(\theta-1)}{2}x^{\theta-2}dx &= k\frac{(\theta-1)}{2}\int_0^1 x^{\theta-2}dx \\
&= k\frac{(\theta-1)}{2}[\frac{1}{\theta-1}x^{\theta-1}]_0^1 \\
&= \frac{k}{2} = 1 \\
&\Rightarrow k = 2
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 xf(x)dx \\
&= (\theta-1)\int_0^1 x^{\theta-1}dx \\
&= (\theta-1)[\frac{1}{\theta}x^{\theta}]_0^1 \\
&= \frac{\theta-1}{\theta}.
\end{aligned}$$

3. $E(X) = \frac{\theta-1}{\theta} = \varphi(\theta)$ alors $\widehat{\theta}_n^{EMM} = \varphi^{-1}(\overline{X}_n) = \frac{1}{1-\overline{X}_n}$.
4. a. la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned}
L(x_1,...,x_n;\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n}(\theta-1)x_i^{\theta-2} \\
&= (\theta-1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta-2}
\end{aligned}$$

   b.

$$\begin{aligned}
lnL(x_1,...x_n;\theta) &= ln\big[(\theta-1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta-2}\big] \\
&= ln(\theta-1)^n + ln(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta-2}) \\
&= nln(\theta-1) + ln(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}) + ln(\prod_{i=1}^{n}x_i^{-2}) \\
&= nln(\theta-1) + \sum_{i=1}^{n}ln(x_i^{\theta}) + \sum_{i=1}^{n}ln(x_i^{-2}) \\
&= nln(\theta-1) + \theta\sum_{i=1}^{n}ln(x_i) - 2\sum_{i=1}^{n}ln(x_i)
\end{aligned}$$

   c. pour calculer l'estimateur de maximum de vraisemblace on dérive la fonction $lnL(x_1,...x_n;\theta)$ par rapport à θ et on prend la valeur qui annule cette dérivée :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial lnL(x_1,...x_n;\theta)}{\partial\theta} &= \frac{n}{\theta-1}+\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)=0 \\
&\Rightarrow \frac{n}{\theta-1}=-\sum_{i=1}^{n} ln(x_i) \\
&\Rightarrow \theta=\frac{n}{-\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)}+1
\end{aligned}$$

On vérifie qu'il s'agit bien d'un maximum en calculant la dérivée seconde et en vérifiant quil est négative pour $\theta = \frac{n}{-\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)} + 1 = \widehat{\theta}_n^{EMV}$.
$\frac{\partial^2 lnL(x_1,...x_n;\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{n}{(\widehat{\theta}_n^{EMV}-1)^2} \leq 0$