Classes : $3^{\text{ème}}$ $A\&B$ — **Techniques d'estimation pour l'ingénieur** — Nombre de pages : 1

Date : 10/11/2021 — Heure : 15h — Durée : 1h

NB : La rédaction et la clarté des résultats seront prises en compte.

Exercice 1 :

Soit T une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. En utilisant la table statistique, calculer :
   a. $\mathbb{P}(0 \leq \text{T} \leq 0.8)$
   b. $\mathbb{P}(\text{T} \geq -0.5)$
   c. $\mathbb{P}(|\text{T}| \geq 1.5)$
2. Tracer la densité de la variable T (prenez soin d'indiquer sur le graphe l'espérance et l'écart-type).
3. Illustrer graphiquement les probabilités précédentes (Dans 3 graphes différents).
4. Déterminer a et b tels que :
   a. $\mathbb{P}(T \leq a) = 0.90$
   b. $\mathbb{P}(|T| \geq b) = 0.80$
5. On note F la fonction de répartition de T. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :
   a. $F(-t) = 1 - F(t)$
   b. $\mathbb{P}(|T| \geq t) = 2(1 - F(t))$

Exercice 2 :

Un sismologue mesure le nombre de jours qui s'écoulent entre deux sèismes de magnitude supérieure à 8. On suppose que cette durée est une v.a. X dont la densitée est :

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{k(\theta-1)}{2} x^{(\theta-2)} & \text{si} \qquad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec k est un réel à déterminer et $\theta > 1$ un paramètre à estimer.

1. (**pt**) Vérifier que pour $k = 2$, f est bien une densité de probabilité.
2. (**pt**) Montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{\theta-1}{\theta}$.
3. En déduire un estimateur $\hat{\theta}_n^{EMM}$ de θ par la méthode des moments.
4. Pour étudier le paramètre θ, on a effectué une suite de n expériences indépendantes qui ont donné les réalisations $(x_1, .., x_n)$ de n v.a. $(X_1, .., X_n)$ i.i.d. de même loi que X tel que $0 \leq x_i \leq 1$ avec $i = 1, .., n$.
   (a) Donner la fonction de vraisemblance $L(x_1, ..., x_n; \theta)$ associée à l'échantillon d'observations.
   (b) Montrer que la fonction Log-vraisemblance associée à l'échantillon d'observations est donnée par :
   $$lnL(x_1, ...x_n; \theta) = nln(\theta - 1) + \theta \sum_i ln(x_i) - 2 \sum_i ln(x_i)$$
   (c) En déduire l'estimateur $\hat{\theta}_n^{EMV}$ de θ par la méthode de vraisemblance.